MACIERZE LOSOWE
LISTA 6
Transformata Cauchy'ego

1. Pokazać, że transformata Cauchy'ego G_μ miary $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ jest holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus \mathrm{supp}(\mu)$.

2. Pokazać, że jeżeli miara $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ ma nośnik zwarty, to można ją wyrazić przy pomocy momentów (m_k) tej miary wzorem

$$G_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{z^{k+1}}$$

w pewnym otoczeniu ∞.

3. Wyznaczyć transformatę Cauchy'ego dla miary dyskretnej, która posiada atomy w punktach na osi rzeczywistej $\{a_1, \dots, a_n\}$ oraz $\mu(\{a_j\}) = \lambda_j$ dla $j = 1, \dots, n$.

4. Stosując wzór odwrócenia Stieltjesa, pokazać, że gęstość miary $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$, której transformata Cauchy'ego ma postać $G_\mu(z) = (z - \sqrt{z^2 - 4})/2$ jest równa

$$d\mu(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2\pi} dx$$

na przedziale $(-2, 2)$ (jest to, jak wiemy, *miara Wignera*).

5. Wyznaczyć transformatę Cauchy'ego miary $\mu \in \mathrm{Prob}(\mathbb{R})$ o gęstości

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{4 - x^2}} dx$$

na przedziale $(-2, 2)$, obliczając momenty tej miary i stosując wzór z zadania 2 (jest to tzw. *miara arcusa sinusa*).

6. Stosując wzór odwrócenia Stieltjesa, wyznaczyć gęstość miary arcusa sinusa, której transformata Cauchy'ego ma postać $G_\mu(z) = 1/\sqrt{z^2 - 4}$ (uzyskaną w poprzednim zadaniu).

7. Wyznaczyć transformatę Cauchy'ego rozkładu Cauchy'ego zadanego miarą

$$d\mu(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)} dx$$

8. Wyznaczyć transformatę Cauchy'ego miary arcusa sinusa μ z definicji, stosując całkowanie po krzywej zamkniętej na płaszczyźnie zespolonej:

   (a) Korzystając z definicji $G_\mu(z)$ i podstawienia $x = 2\cos\alpha$ dla $0 \leq \alpha \leq \pi$, pokazać, że

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{z - 2\cos\alpha} d\alpha$$

(b) Stosując podstawienie $w = e^{i\alpha}$, pokazać, że można zapisać G w postaci całki krzywoliniowej

$$G_\mu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{zw - w^2 - 1}$$

gdzie $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ z dodatnią orientacją.

(c) Zdefiniować gałąź pierwiastka $\sqrt{4 - z^2}$ dla $z \in \mathbb{C}^+$, która jest ciągła na $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$, korzystając z iloczynu gałęzi $\sqrt{2 - z}\sqrt{2 + z}$ oraz związanych z nimi argumentów głównych.

(d) Wyznaczyć bieguny funkcji podcałkowej $w_1 = (z - \sqrt{z^2 - 4})/2$, $w_2 = (z + \sqrt{z^2 - 4})/2$ dla dla $z \in \mathbb{C}^+$, gdzie $\sqrt{z^2 - 4}$ jest gałęzią pierwiastka zdefiniowaną w zadaniu poprzednim. Następnie wykazać, że w_1 leży wewnątrz, a w_2 na zewnątrz koła $\{w : |w| < 1\}$.

(e) Stosując twierdzenie o residuach, pokazać, że

$$G_\mu(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4}}$$

9. Wyznaczyć transformatę Cauchy'ego miary Wignera μ z definicji, stosując całkowanie po krzywej zamkniętej na płaszczyźnie zespolonej:

(a) Korzystając z definicji $G_\mu(z)$, pokazać, że

$$G_\mu(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{4\sin^2(\alpha) d\alpha}{z - 2\cos\alpha}$$

(b) Stosując podstawienie $w = e^{i\alpha}$, pokazać, że

$$G_\mu(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_\Gamma \frac{(w^2 - 1)^2 dw}{w^2(w^2 - zw + 1)}$$

gdzie $\Gamma = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ z dodatnią orientacją.

(c) Stosując twierdzenie o residuach, pokazać, że

$$G_\mu(z) = \frac{z - \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

Romuald Lenczewski